

# Correctievoorschrift VWO

# 2010

tijdvak 1

oud programma

wiskunde B1,2

Het correctievoorschrift bestaat uit:

- 1 Regels voor de beoordeling
- 2 Algemene regels
- 3 Vakspecifieke regels
- 4 Beoordelingsmodel
- 5 Inzenden scores

## 1 Regels voor de beoordeling

---

Het werk van de kandidaten wordt beoordeeld met inachtneming van de artikelen 41 en 42 van het Eindexamenbesluit v.w.o.-h.a.v.o.-m.a.v.o.-v.b.o.

Voorts heeft de CEVO op grond van artikel 39 van dit Besluit de *Regeling beoordeling centraal examen* vastgesteld (CEVO-09.0313, 31 maart 2009, zie [www.examenblad.nl](http://www.examenblad.nl)). Deze regeling blijft ook na het aantreden van het College voor Examens van kracht.

Voor de beoordeling zijn de volgende passages van de artikelen 36, 41, 41a en 42 van het Eindexamenbesluit van belang:

- 1 De directeur doet het gemaakte werk met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen en het proces-verbaal van het examen toekomen aan de examinerator. Deze kijkt het werk na en zendt het met zijn beoordeling aan de directeur. De examinerator past de beoordelingsnormen en de regels voor het toekennen van scorepunten toe die zijn gegeven door het College voor Examens.
- 2 De directeur doet de van de examinerator ontvangen stukken met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen, het proces-verbaal en de regels voor het bepalen van de score onverwijld aan de gecommiteerde toekomen.
- 3 De gecommiteerde beoordeelt het werk zo spoedig mogelijk en past de beoordelingsnormen en de regels voor het bepalen van de score toe die zijn gegeven door het College voor Examens.

De gecommiteerde voegt bij het gecorrigeerde werk een verklaring betreffende de verrichte correctie. Deze verklaring wordt mede ondertekend door het bevoegd gezag van de gecommiteerde.

- 4 De examinerator en de gecommiteerde stellen in onderling overleg het aantal scorepunten voor het centraal examen vast.
- 5 Indien de examinerator en de gecommiteerde daarbij niet tot overeenstemming komen, wordt het geschil voorgelegd aan het bevoegd gezag van de gecommiteerde. Dit bevoegd gezag kan hierover in overleg treden met het bevoegd gezag van de examinerator. Indien het geschil niet kan worden beslecht, wordt hiervan melding gemaakt aan de inspectie. De inspectie kan een derde onafhankelijke gecommiteerde aanwijzen. De beoordeling van de derde gecommiteerde komt in de plaats van de eerdere beoordelingen.

## 2 Algemene regels

---

Voor de beoordeling van het examenwerk zijn de volgende bepalingen uit de *Regeling beoordeling centraal examen* van toepassing:

- 1 De examinerator vermeldt op een lijst de namen en/of nummers van de kandidaten, het aan iedere kandidaat voor iedere vraag toegekende aantal scorepunten en het totaal aantal scorepunten van iedere kandidaat.
- 2 Voor het antwoord op een vraag worden door de examinerator en door de gecommiteerde scorepunten toegekend, in overeenstemming met het beoordelingsmodel. Scorepunten zijn de getallen 0, 1, 2, ..., n, waarbij n het maximaal te behalen aantal scorepunten voor een vraag is. Andere scorepunten die geen gehele getallen zijn, of een score minder dan 0 zijn niet geoorloofd.
- 3 Scorepunten worden toegekend met inachtneming van de volgende regels:
  - 3.1 indien een vraag volledig juist is beantwoord, wordt het maximaal te behalen aantal scorepunten toegekend;
  - 3.2 indien een vraag gedeeltelijk juist is beantwoord, wordt een deel van de te behalen scorepunten toegekend, in overeenstemming met het beoordelingsmodel;
  - 3.3 indien een antwoord op een open vraag niet in het beoordelingsmodel voorkomt en dit antwoord op grond van aantoonbare, vakinhoudelijke argumenten als juist of gedeeltelijk juist aangemerkt kan worden, moeten scorepunten worden toegekend naar analogie of in de geest van het beoordelingsmodel;
  - 3.4 indien slechts één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, wordt uitsluitend het eerstgegeven antwoord beoordeeld;
  - 3.5 indien meer dan één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, worden uitsluitend de eerstgegeven antwoorden beoordeeld, tot maximaal het gevraagde aantal;
  - 3.6 indien in een antwoord een gevraagde verklaring of uitleg of afleiding of berekening ontbreekt dan wel foutief is, worden 0 scorepunten toegekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is aangegeven;
  - 3.7 indien in het beoordelingsmodel verschillende mogelijkheden zijn opgenomen, gescheiden door het teken /, gelden deze mogelijkheden als verschillende formuleringen van hetzelfde antwoord of onderdeel van dat antwoord;

- 3.8 indien in het beoordelingsmodel een gedeelte van het antwoord tussen haakjes staat, behoeft dit gedeelte niet in het antwoord van de kandidaat voor te komen;
- 3.9 indien een kandidaat op grond van een algemeen geldende woordbetekenis, zoals bijvoorbeeld vermeld in een woordenboek, een antwoord geeft dat vakinhoudelijk onjuist is, worden aan dat antwoord geen scorepunten toegekend, of tenminste niet de scorepunten die met de vakinhoudelijke onjuistheid gemoeid zijn.
- 4 Het juiste antwoord op een meerkeuzevraag is de hoofdletter die behoort bij de juiste keuzemogelijkheid. Voor een juist antwoord op een meerkeuzevraag wordt het in het beoordelingsmodel vermelde aantal punten toegekend. Voor elk ander antwoord worden geen scorepunten toegekend. Indien meer dan één antwoord gegeven is, worden eveneens geen scorepunten toegekend.
- 5 Een fout mag in de uitwerking van een vraag maar één keer worden aangerekend, tenzij daardoor de vraag aanzienlijk vereenvoudigd wordt en/of tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.
- 6 Een zelfde fout in de beantwoording van verschillende vragen moet steeds opnieuw worden aangerekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.
- 7 Indien de examinerator of de gecommiteerde meent dat in een examen of in het beoordelingsmodel bij dat examen een fout of onvolkomenheid zit, beoordeelt hij het werk van de kandidaten alsof examen en beoordelingsmodel juist zijn. Hij kan de fout of onvolkomenheid mededelen aan het College voor Examens. Het is niet toegestaan zelfstandig af te wijken van het beoordelingsmodel. Met een eventuele fout wordt bij de definitieve normering van het examen rekening gehouden.
- 8 Scorepunten worden toegekend op grond van het door de kandidaat gegeven antwoord op iedere vraag. Er worden geen scorepunten vooraf gegeven.
- 9 Het cijfer voor het centraal examen wordt als volgt verkregen.  
Eerste en tweede corrector stellen de score voor iedere kandidaat vast. Deze score wordt meegedeeld aan de directeur.  
De directeur stelt het cijfer voor het centraal examen vast op basis van de regels voor omzetting van score naar cijfer.

NB Het aangeven van de onvolkomenheden op het werk en/of het noteren van de behaalde scores bij de vraag is toegestaan, maar niet verplicht.

### 3 Vakspecifieke regels

---

Voor dit examen kunnen maximaal 81 scorepunten worden behaald.

Voor dit examen zijn de volgende vakspecifieke regels vastgesteld:

- 1 Voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening wordt één punt afgetrokken tot het maximum van het aantal punten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.
- 2 De algemene regel 3.6 geldt ook bij de vragen waarbij de kandidaten de Grafische rekenmachine (GR) gebruiken. Bij de betreffende vragen doen de kandidaten er verslag van hoe zij de GR gebruiken.

## 4 Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

### Oppervlakte en inhoud bij $f(x) = e^x$

#### 1 maximumscore 6

- Lijn  $AB$  heeft richtingscoëfficiënt  $\frac{e^2-1}{2} = \frac{1}{2}(e^2-1)$  1
- Voor lijn  $AB$  geldt de formule  $y = \frac{1}{2}(e^2-1) \cdot x + 1$  1
- De oppervlakte van het vlakdeel is  $\int_0^2 (\frac{1}{2}(e^2-1) \cdot x + 1 - e^x) dx$  1
- Een primitieve van  $\frac{1}{2}(e^2-1) \cdot x + 1 - e^x$  is  $\frac{1}{4}(e^2-1) \cdot x^2 + x - e^x$  2
- De gevraagde oppervlakte is 2 1

of

- De oppervlakte van het vlakdeel is het verschil tussen de oppervlakte van een trapezium en  $\int_0^2 e^x dx$  1
- De oppervlakte van het bedoelde trapezium is  $e^2 + 1$  2
- $\int_0^2 e^x dx = e^2 - 1$  2
- De gevraagde oppervlakte is 2 1

#### 2 maximumscore 6

- De grafiek van  $g(x) = e^x - 1$  wordt om de  $x$ -as gewenteld 1
- De inhoud is  $\int_0^2 \pi \cdot (e^x - 1)^2 dx$  1
- $(e^x - 1)^2 = e^{2x} - 2e^x + 1$  1
- Een primitieve van  $e^{2x} - 2e^x + 1$  is  $\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + x$  2
- De inhoud is  $\pi \cdot (\frac{1}{2}e^4 - 2e^2 + 3\frac{1}{2})$  1

## Met een gemeenschappelijk brandpunt

### 3 maximumscore 5

- $\angle(AP, \text{raaklijn aan } e_1) = \angle(BP, \text{raaklijn aan } e_1) = \alpha$  ;  
*raaklijneigenschap ellips* 1
- $\angle(AP, \text{raaklijn aan } e_2) = \angle(CP, \text{raaklijn aan } e_2) = \beta$  ;  
*raaklijneigenschap ellips* 1
- $\angle(CP, \text{raaklijn aan } e_1) = \angle(BP, \text{raaklijn aan } e_1) = \alpha$  ;  
*overstaande hoeken* 1
- $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$  ; *gestrekte hoek* 1
- $\angle(\text{raaklijn aan } e_1, \text{raaklijn aan } e_2) = \alpha + \beta = 90^\circ$  1

### 4 maximumscore 4

- Uit de definitie van de ellips volgt  $PA + PC = QA + QC$  1
- Uit de definitie van de ellips volgt  $PA + PB = QA + QB$  1
- Hieruit volgt  $PC - PB = QC - QB$  1
- Volgens de definitie van de hyperbool liggen  $P$  en  $Q$  dus op eenzelfde hyperbool met brandpunten  $B$  en  $C$  1

## Een parabool?

### 5 maximumscore 4

- $A(4, 4)$  en  $B(-6, 6)$  1
- Als  $a = 4$  is de formule  $y = -\frac{1}{5}x + 4\frac{4}{5}$  1
- De coördinaten van  $A$  voldoen, want  $4 = -\frac{1}{5} \cdot 4 + 4\frac{4}{5}$  1
- De coördinaten van  $B$  voldoen ook, want  $6 = -\frac{1}{5} \cdot -6 + 4\frac{4}{5}$   
(dus de formule is juist voor  $a = 4$ ) 1

of

- $A(4, 4)$  en  $B(-6, 6)$  1
- De lijn door  $A(4, 4)$  en  $B(-6, 6)$  heeft richtingscoëfficiënt  $-\frac{1}{5}$  1
- Voor lijn  $AB$  geldt dus  $y = 4 - \frac{1}{5}(x - 4)$ , ofwel  $y = -\frac{1}{5}x + 4\frac{4}{5}$  1
- $a = 4$  invullen in de gegeven formule geeft ook  $y = -\frac{1}{5}x + 4\frac{4}{5}$   
(dus de formule is juist voor  $a = 4$ ) 1

### 6 maximumscore 4

- Voor het snijpunt met de  $y$ -as geldt  $y = -\frac{1}{5}a^2 + 2a$  1
- $\frac{dy}{da} = -\frac{2}{5}a + 2$  1
- $\frac{dy}{da} = 0$  geeft  $a = 5$  1
- De grootste waarde van  $y$  is  $-\frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 = 5$  1

of

- Voor het snijpunt met de  $y$ -as geldt  $y = -\frac{1}{5}a^2 + 2a$  1
- $-\frac{1}{5}a^2 + 2a = 0$  geeft  $a(-\frac{1}{5}a + 2) = 0$  dus  $a = 0$  of  $a = 10$  1
- Hieruit volgt dat het maximum wordt aangenomen voor  $a = 5$  1
- De grootste waarde van  $y$  is  $-\frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 = 5$  1

### 7 maximumscore 6

- De afgeleide van  $\frac{1}{20}x^2 + 5$  is  $\frac{1}{10}x$  1
- $x = 4$  invullen geeft  $\frac{2}{5}$  als richtingscoëfficiënt van de raaklijn 1
- Een vergelijking van de raaklijn in  $(4, 5\frac{4}{5})$  is  $y = \frac{2}{5}x + 4\frac{1}{5}$  1
- De raaklijn is een van de lijnen  $AB$  als  $\frac{1}{5}a - 1 = \frac{2}{5}$  en  $-\frac{1}{5}a^2 + 2a = 4\frac{1}{5}$  1
- $\frac{1}{5}a - 1 = \frac{2}{5}$  geeft  $a = 7$  1
- $a = 7$  invullen in  $-\frac{1}{5}a^2 + 2a$  geeft  $4\frac{1}{5}$  (en dus is de raaklijn aan de parabool in  $(4, 5\frac{4}{5})$  een van de lijnen  $AB$ ) 1

## Wisselingen in rijtjes kop en munt

### 8 maximumscore 3

- Op 5 van de 9 plekken moet een wisseling plaatsvinden;  
dit kan op  $\binom{9}{5}$  manieren 1
- $\binom{9}{5} = 126$  1
- Als de wisselingen vastliggen, kan een rijtje nog met een K of een M beginnen; dus zijn er  $2 \cdot 126 = 252$  rijtjes met 5 wisselingen 1

### 9 maximumscore 3

- De kans dat een rijtje ten minste één wisseling heeft, is  $(1 - \frac{2}{1024}) = \frac{1022}{1024}$  1
- De kans op 20 keer zo'n rijtje is  $(\frac{1022}{1024})^{20} \approx 0,962$  2

### 10 maximumscore 5

- De kans dat een willekeurig rijtje meer dan 5 wisselingen heeft, is  $\frac{168+72+18+2}{1024} = \frac{260}{1024} = \frac{65}{256}$  1
- Het gaat om een binomiale kans met  $n = 20$  en  $p = \frac{65}{256}$  1
- Beschrijven hoe de binomiale kans  $P(X \geq 9 \mid n = 20 \text{ en } p = \frac{65}{256})$  berekend kan worden, waarbij  $X$  het aantal rijtjes met meer dan 5 wisselingen is 1
- De kans is (ongeveer) 0,045 1
- Deze kans is kleiner dan 5%, dus we vertrouwen Jolly niet 1

## Jupiter en Aarde

### 11 maximumscore 5

- De afstand is  $\sqrt{(\cos 2\pi t - 5 \cos \frac{1}{6} \pi t)^2 + (\sin 2\pi t - 5 \sin \frac{1}{6} \pi t)^2}$  1
- Dit is gelijk aan  $\sqrt{\cos^2 2\pi t - 10 \cos 2\pi t \cdot \cos \frac{1}{6} \pi t + 25 \cos^2 \frac{1}{6} \pi t + \sin^2 2\pi t - 10 \sin 2\pi t \cdot \sin \frac{1}{6} \pi t + 25 \sin^2 \frac{1}{6} \pi t}$  1
- $\cos^2 2\pi t + \sin^2 2\pi t = 1$  en  $\cos^2 \frac{1}{6} \pi t + \sin^2 \frac{1}{6} \pi t = 1$  1
- Dus de afstand is  $\sqrt{26 - 10(\cos 2\pi t \cdot \cos \frac{1}{6} \pi t + \sin 2\pi t \cdot \sin \frac{1}{6} \pi t)}$  1
- Dus de afstand is  $\sqrt{26 - 10 \cos(\frac{11}{6} \pi t)}$  1

### 12 maximumscore 5

- De snelheid is de afgeleide van  $\sqrt{26 - 10 \cos(\frac{11}{6} \pi t)}$  1
- De afgeleide van  $26 - 10 \cos(\frac{11}{6} \pi t)$  is  $\frac{110}{6} \pi \cdot \sin(\frac{11}{6} \pi t)$  1
- De afgeleide van  $\sqrt{26 - 10 \cos(\frac{11}{6} \pi t)}$  is  $\frac{\frac{110}{6} \pi \cdot \sin(\frac{11}{6} \pi t)}{2\sqrt{26 - 10 \cos(\frac{11}{6} \pi t)}}$  2
- Op tijdstip  $t = 3$  is de snelheid (waarmee de afstand afneemt ongeveer) 5,65 (AE/jaar) (of: op tijdstip  $t = 3$  is de snelheid (ongeveer)  $-5,65$  (AE/jaar)) 1

#### Opmerking

Als de kettingregel niet gebruikt is, maximaal 3 punten toekennen.



Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## Met constante hoek

- 13 maximumscore 4**
- Driehoek  $ABN$  is een gelijkbenige driehoek met tophoek  $ANB$  van  $60^\circ$ , dus de basishoek  $NAB$  is ook  $60^\circ$ ; *gelijkbenige driehoek, hoekensom driehoek* 2
  - De hoek tussen de raaklijn in  $A$  en  $AN$  is  $90^\circ$ , dus de hoek tussen de raaklijn in  $A$  aan de cirkelboog met middelpunt  $N$  en lijn  $AB$  is  $30^\circ$ ; *raaklijn* 1
  - De gevraagde hoek tussen de cirkelbogen is dus  $60^\circ$  1
- 14 maximumscore 4**
- De gevraagde meetkundige plaats bestaat uit twee cirkelbogen op  $AB$ , met middelpunten  $X$  en  $Y$ , waarbij  $\angle AXB = 90^\circ$  en  $\angle AYB = 90^\circ$  1
  - Het tekenen van de middelloodlijn van lijnstuk  $AB$  1
  - Het tekenen van de punten  $X$  en  $Y$  1
  - Het tekenen van de cirkelbogen 1
- 15 maximumscore 3**
- Als  $P_1$  en  $P_2$  aan verschillende kanten van  $AB$  liggen zó dat  $\angle AP_1B = 140^\circ$  en  $\angle AP_2B = 40^\circ$  en dus  $\angle AP_1B + \angle AP_2B = 180^\circ$ , dan is vierhoek  $AP_1BP_2$  een koordenvierhoek; *omgekeerde koordenvierhoekstelling* 1
  - Hieruit volgt dat  $A$ ,  $P_1$ ,  $B$  en  $P_2$  op één cirkel liggen 1
  - De meetkundige plaats van alle punten  $P$  waarvoor  $\angle APB = 140^\circ$  bestaat uit twee cirkelbogen die de cirkelbogen die behoren bij  $\angle APB = 40^\circ$  aanvullen tot twee cirkels (met uitzondering van de punten  $A$  en  $B$ ) 1

## Rij en oppervlakte

### 16 maximumscore 3

- $R_{100} = \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{\frac{i}{100} + 1}$  1
- Beschrijven hoe deze som berekend kan worden 1
- $R_{100} \approx 0,6907$  1

of

- $R_{100} = \sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i+100}$  1
- Beschrijven hoe deze som berekend kan worden 1
- $R_{100} \approx 0,6907$  1

### 17 maximumscore 3

- De  $i$ -de rechthoek is  $\frac{1}{n}$  breed en  $\frac{1}{\frac{i}{n} + 1}$  hoog 1
- De oppervlakte van de rechthoek is gelijk aan  $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\frac{i}{n} + 1} = \frac{1}{i+n}$  1
- Voor  $i=1$  geeft dit:  $\frac{1}{1+n}$ , voor  $i=2$ :  $\frac{1}{2+n}$ , ...,  
en voor  $i=n$ :  $\frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}$ , dus  $R_n = \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \dots + \frac{1}{2n}$  1

### 18 maximumscore 4

- $R_{100} = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{200}$  1
- $R_{99} = \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{198}$  1
- $R_{100} - R_{99} = \frac{1}{199} + \frac{1}{200} - \frac{1}{100}$  1
- Het antwoord  $\frac{1}{39800}$  1

### 19 maximumscore 4

- $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n$  is de oppervlakte onder de grafiek van  $f$  op  $[0, 1]$  1
- De oppervlakte is gelijk aan  $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$  1
- Een primitieve van  $\frac{1}{x+1}$  is  $\ln(x+1)$  1
- De oppervlakte is  $\ln 2$  (dus  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \ln 2$ ) 1

## 5 Inzenden scores

---

Verwerk de scores van de alfabetisch eerste vijf kandidaten per school in het programma WOLF.

Zend de gegevens uiterlijk op 7 juni naar Cito.